

**МИНИСТЕРСТВО ПРОСВЕЩЕНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**  
**Министерство образования и науки Удмуртской Республики**  
**Управление образования физической культуры и спорта Администрации**  
**муниципального образования "Муниципальный округ Каракулинский**  
**район Удмуртской Республики"**  
**МБОУ "Чегандинская СОШ"**

РАССМОТРЕНО  
на заседании  
педагогического совета  
Протокол №1 от «30» 08. 2023 г.

УТВЕРЖДЕНО  
Директором МБОУ "Чегандинская  
СОШ"  
Смольникова Т.А.  
Приказ №67 от «30» 08. 2023 г.



**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА**

**Элективного учебного курса «Практикум по геометрии»**  
для обучающихся 11 класса

Составитель : Карелина Вера Николаевна  
учитель математики I квалификационной категории.  
Рецензент: Кожевникова Алевтина Александровна  
учитель математики I квалификационной категории.

## **Практикум по геометрии**

### Пояснительная записка.

Геометрия – раздел математики, являющийся носителем собственного метода познания мира, с помощью которого рассматриваются формы и взаимное расположение предметов, развивающих пространственные представления, образное мышление учащихся, изобразительно - графические умения, приемы конструктивной деятельности, формируют геометрическое мышление.

Данный курс представлен в виде практикума, который позволит, расширить и систематизировать знания учащихся в использовании методов решения стереометрических задач. Программа курса предусматривает изучение «Метода сечений» для решения задач различного уровня сложности. Метод сечений, известен своей универсальностью. Он применяется в некоторых разделах физики, в теоретической механике, сопротивлении материалов, в некоторых разделах высшей математики, других естественных науках и технических дисциплинах высшего образования. Этот метод оказывает значительное влияние на развитие у учащихся пространственных представлений и пространственного мышления.

### **Цели курса:**

- Расширение и углубление знаний учащихся о методах и приемах решения стереометрических задач.
- Развитие интереса к предмету и возможности овладения им с точки зрения дальнейшей перспективы применения полученных знаний в своей будущей профессии.

### **Задачи курса:**

- Развитие пространственных представлений и воображения учащихся;
- Систематизация теоретических знаний учащихся по стереометрии;
- Формирование графической культуры учащихся при построении моделей многогранников.

При организации изучения элективного курса по геометрии необходимо использовать личностно-ориентированные технологии, направленные на запланированный конечный результат. Для передачи теоретического материала наиболее эффективны уроки-лекции, для закрепления материала уроки-практикумы. Основной формой учебного процесса должна стать исследовательская деятельность учащихся.

**Программа данного элективного учебного предмета составлена на основе материалов Л.Силаева «Метод сечений в стереометрии», опубликованном в газете «Математика» № 35-1998г.,** содержит дидактические материалы (Приложение 1,3), темы творческих работ (Приложение 4), календарно-тематическое планирование и список литературы.

Успешность освоения курса оценивается на итоговом зачете (Приложение 2). Итоговая работа оценивается оценкой «зачтено», если учащийся выполнил три задания контрольной работы.

Содержание материала, уровневая индивидуализация учебной и дифференциация обучающей деятельности на фоне благоприятного психологического климата помогут ученику сформировать общеучебные умения и навыки, повысить его образовательный уровень, что связано с дальнейшим успешным самообразованием и профессиональным самоопределением.

Для получения эффективных результатов обучения имеет смысл использовать на занятиях компьютер и интерактивную доску, которые помогут как в визуализации результатов работы с данными, так и при решении задач. Это позволит учащимся на практике использовать компьютер при оперировании пространственными объектами в 11 классе.

Материал, представленный в данном элективном учебном предмете, характеризуется следующими особенностями:

1. Метод сечений применяется только для многогранников.
2. В задачах используются в основном только простейшие многогранники - с целью доступности решения этих задач учащимися, а также в виду возможности применения одних и тех же геометрических конструкций по несколько раз для изучения различных тем
3. Часть задач представлено без числовых данных для того, чтобы создать возможность их многовариантного применения. В некоторых задачах намеренно повторяются алгоритмы вычисления различных элементов с целью упрочнения умений и навыков учащихся и стандартизации к решению предложенных и аналогичных задач.

Тематическое планирование построено так, что ученики на элективном курсе углубляют знания, полученные на уроках геометрии, и получают умения решать задачи повышенной сложности. Элективный учебный предмет рассчитан на учащихся 11 класса, изучающих математику, как на профильном уровне, так и при универсальном обучении, 34 часа

## основное содержание обучения.

### 1. Методы построения сечения многогранников. 6ч

Простейшие задачи на построение сечений параллелепипеда и тетраэдра. Аксиоматически метод. (Метод следов. Метод внутреннего проектирования) Комбинированный метод (Метод параллельных прямых. Метод параллельного переноса секущей плоскости). Метод выносных чертежей (Метод разворота плоскостей).

### 2. Нахождение площади сечений в многогранниках. 10ч

Площади многоугольников. Признаки подобия треугольников. Ортогональное проектирование и его свойства. Теорема о площади ортогональной проекции многоугольника.

### 3. Нахождение расстояния и угла между скрещивающимися прямыми в многогранниках. 4ч

Четыре способа решения задач:

1. Нахождение длины общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых, то есть отрезка с концами на этих прямых и перпендикулярного обеим.
2. Нахождение расстояния от одной из скрещивающихся прямых до параллельной ей плоскости, проходящей через другую прямую.
3. Нахождение расстояния между двумя параллельными плоскостями, проходящими через заданные скрещивающиеся прямые.
4. Нахождение расстояния от точки, являющейся проекцией одной из скрещивающихся прямых на перпендикулярную ей плоскость, до проекции другой прямой на ту же самую плоскость

### 4. Нахождение угла между плоскостями. 4ч

Двугранный угол. Линейный угол двугранного угла. Многогранный угол. Зависимость между плоскими и двугранными углами многогранных углов.

### 5. Решение задач повышенной сложности.

#### Отношение объемов частей многогранника. 6ч.

Объемы многогранников. Решение задач по всем разделам курса, в которых используются геометрические конструкции из рассмотренных задач разделов 1-4, в которых: 1) построено не более двух сечений; 2) все части многогранника не равновелики; 3) из частей многогранника, хотя бы одна должна быть хорошо известным геометрическим телом.

Дидактический материал к пунктам 1-5 представлен в Приложении 1.

### Требования к уровню подготовки учащихся.

*Исходя из задач преподавания курса «Практикум по решению стереометрических задач», программа предусматривает формирование следующих умений и навыков:*

- изображать на рисунках и чертежах пространственные геометрические фигуры и их комбинации, задаваемые условиями задач; выделять изученные фигуры на моделях и чертежах;
- вычислять значения геометрических величин, используя изученные формулы, а также аппарат алгебры, анализа и тригонометрии;
- применять основные методы геометрии (проектирования, преобразований) к решению геометрических задач.

## Методические рекомендации

Знакомство учащихся с целями и задачами курса. На первом занятии учащимся предлагается ряд задач повышенной сложности, решение которых потребует от них знания многих тем элективного курса. Класс делится на группы, каждая группа получает задачу (Приложение 3). Защита задач проходит на последнем занятии. По желанию учащиеся могут приготовить реферат, проект, провести исследовательскую работу по данной теме (Приложение 4).

### Тема 1. Методы построения сечения многогранников

Тема «Методы решения задач на построение сечений многогранников» предполагает изучение основных методов построения сечений. На первом занятии этой темы следует решить простейшие

задачи на построение сечений параллелепипеда и тетраэдра. При изучении темы можно использовать презентационный материал, который поможет учителю при организации учебно - воспитательного процесса, а ученикам – для визуализации результатов работы, развития пространственного мышления, привития устойчивого интереса к геометрии. На занятиях необходимо использовать устные задачи, для того, чтобы ученики могли научиться представлять всю стереометрическую конструкцию «в уме» и устно выполнять необходимые расчеты. Устные задачи помогут учителю активизировать учебный процесс, и будут способствовать лучшему пониманию учебного материала школьниками.

### **Тема 2. Нахождение площади сечений в многогранниках.**

На первом занятии по теме при решении задач используются основные формулы площадей многоугольников, изученные в курсе планиметрии. При рассмотрении теоремы о площади ортогональной проекции многоугольника следует использовать «вставку прямоугольного треугольника» между плоскостью сечения и плоскостью той грани призмы (как правило основания) на которую проектируется фигура в сечении, - причем со стороны острого угла между плоскостями (Приложение. Тема 2 задача № 12).

### **Тема 3. Нахождение расстояния и угла между скрещивающимися прямыми в многогранниках**

Нахождение расстояния и угла между скрещивающимися прямыми в многогранниках традиционно считается трудной темой для учащихся.

Для нахождения расстояния между скрещивающимися прямыми можно рекомендовать рассмотрения 4-х основных способов решения задач.

*1. нахождение длины общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых, т.е. отрезка с концами на этих прямых и перпендикулярного им обеим.*

Применение этого способа ограничено простыми примерами, так как в сложных задачах не только сложно определить местоположение их общего перпендикуляра, но и вычислить его длину.

*2. нахождение расстояния от одной скрещивающейся прямой до параллельной ей плоскости, проходящей через другую прямую.*

*3. нахождение расстояния между двумя параллельными плоскостями, проходящими, через заданные скрещивающиеся прямые.*

Данный способ применяется в сложных задачах в том случае, если когда есть возможность построения двух параллельных сечений, содержащих скрещивающиеся прямые.

*4. Нахождение расстояния от точки, являющейся проекцией одной из скрещивающихся прямых на перпендикулярную ей плоскость, до проекции другой прямой на ту же самую плоскость.* Применять этот способ при решении простых задач нет необходимости, так как первые три дают результат быстрее и проще. Для задач же средней и повышенной трудности данный способ можно считать основным (универсальным). Все четыре способа легко (устно) демонстрируются на простейшей модели, приведенной в задаче №1 (Приложение1. Тема 3).

### **Тема 4. «Определение угла между плоскостями»**

При изучении данной темы следует рассмотреть два способа построения и определения угла между плоскостями. 1-й классический, его иллюстрирует Задача № 228 из «Сборника задач по стереометрии» (автор Л.М. Лоповок). Второй способ «Метод введения прямоугольного треугольника».

**5. Заканчивается изучение элективного курса Решением задач повышенной сложности:** Данные задачи представлены в Приложении и в учебном пособии Ю.А, Глазкова, «Сборник заданий и методических рекомендаций ЕГЭ».

**6. Заключительное занятие** проходит в виде защиты решенных задач, проектов, рефератов над которыми обучающие работы в течение семестра.

#### Требования к уровню подготовки учащихся.

*Исходя из задач преподавания курса «Практикум по решению стереометрических задач», программа предусматривает формирование следующих умений и навыков:*

- изображать на рисунках и чертежах пространственные геометрические фигуры и их комбинации, задаваемые условиями задач; выделять изученные фигуры на моделях и чертежах;

- вычислять значения геометрических величин, используя изученные формулы, а также аппарат алгебры, анализа и тригонометрии;
- применять основные методы геометрии (проектирования, преобразований) к решению геометрических задач.

**тематическое планирование**

№ п/п	Наименование разделов и тем	Количество часов	Основное содержание	Основные Зуны	Контроль
1	Методы решения задач на построение сечений многогранников. Метод следов, метод вспомогательных сечений. Комбинированный метод.	2	Простейшие задачи на построение сечений параллелепипеда и тетраэдра. Аксиоматический метод. (Метод следов. Метод внутреннего проектирования). Комбинированный метод	изображать на рисунках и чертежах пространственные геометрические фигуры и их комбинации, задаваемые условиями задач; выделять изученные фигуры на моделях и чертежах;	
2	Методы решения задач на построение сечений многогранников. Метод внутреннего проектирования. Метод параллельных прямых	2	Метод параллельных прямых. Метод параллельного переноса секущей плоскости).	-применять основные методы геометрии (проектирования, преобразований) к решению геометрических задач	
3	Методы решения задач на построение сечений многогранников. Метод параллельного переноса секущей плоскости	2	Метод выносных чертежей (Метод разворота плоскостей).	-применять основные методы геометрии (проектирования, преобразований) к решению геометрических задач	
4	Нахождение площади сечений в многогранниках. (куб, призма).	2	Площади многоугольников.	вычислять значения геометрических величин, используя изученные формулы, а также аппарат алгебры, анализа и тригонометрии;	
5	Нахождение площади сечений в многогранниках (пирамида)	2	Площади многоугольников	вычислять значения геометрических величин, используя изученные формулы, а также аппарат алгебры, анализа и тригонометрии;	
6	Решение задач на вычисление сечений с использованием свойств подобных треугольников	2	Признаки подобия треугольников.	выделять изученные фигуры на моделях и чертежах;	

7	Решение задач на вычисление сечений с использованием свойств подобных треугольников	2	Признаки подобия треугольников.	выделять изученные фигуры на моделях и чертежах;	
8	Нахождение площади сечений в многогранниках с применением теоремы о площади ортогональной проекции многоугольника	2	Теорема о площади ортогональной проекции многоугольника	вычислять значения геометрических величин, используя изученные формулы, а также аппарат алгебры, анализа и тригонометрии;	
9	Нахождение площади сечений в многогранниках с применением теоремы о площади ортогональной проекции многоугольника	2	Теорема о площади ортогональной проекции многоугольника	вычислять значения геометрических величин, используя изученные формулы, а также аппарат алгебры, анализа и тригонометрии;	
10	Нахождение расстояния и угла между скрещивающимися прямыми в многогранниках	2	1.Нахождение длины общего перпендикуляра двух скрещивающихся прямых, то есть отрезка с концами на этих прямых и перпендикулярного обеим.	вычислять значения геометрических величин, используя изученные формулы, а также аппарат алгебры, анализа и тригонометрии;	
11	Нахождение расстояния и угла между скрещивающимися прямыми в многогранниках	2	2.Нахождение расстояния от одной из скрещивающихся прямых до параллельной ей плоскости, проходящей через другую прямую. 3.Нахождение расстояния между двумя параллельными плоскостями, проходящими через заданные скрещивающиеся прямые. 4.Нахождение расстояния от точки, являющейся проекцией одной из скрещивающихся прямых на перпендикулярную ей плоскость, до проекции другой прямой на ту же самую плоскость	вычислять значения геометрических величин, используя изученные формулы, а также аппарат алгебры, анализа и тригонометрии;	
12	Нахождение угла между плоскостями	2	Двугранный угол. Линейный угол двугранного угла. Многогранный угол. Зависимость между	выделять изученные фигуры на моделях и чертежах;	

			плоскими и двугранными углами многогранных углов.		
13	Нахождение угла между плоскостями	2	Двугранный угол. Линейный угол двугранного угла. Многогранный угол. Зависимость между плоскими и двугранными углами многогранных углов.	выделять изученные фигуры на моделях и чертежах;	
14	Отношение объемов частей многогранника	3	Объемы многогранников. Решение задач по всем разделам курса, в которых используются геометрические конструкции из рассмотренных задач разделов 1-4, в которых: 1) построено не более двух сечений; 2) все части многогранника не равновелики; 3) из частей многогранника, хотя бы одна должна быть хорошо известным геометрическим телом.	вычислять значения геометрических величин, используя изученные формулы, а также аппарат алгебры, анализа и тригонометрии;	
15	Отношение объемов частей многогранника	3	Объемы многогранников. Решение задач по всем разделам курса, в которых используются геометрические конструкции из рассмотренных задач разделов 1-4, в которых: 1) построено не более двух сечений; 2) все части многогранника не равновелики; 3) из частей многогранника, хотя бы одна должна быть хорошо известным геометрическим телом.	вычислять значения геометрических величин, используя изученные формулы, а также аппарат алгебры, анализа и тригонометрии;	
16	Контрольная работа	1			1
17	Итоговое занятие	1			1



## Рецензия

Рабочая программа по \_\_\_\_\_

Класс \_\_\_\_\_

Учителя \_\_\_\_\_

Составлена в соответствии с типовой учебной программой \_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ Реализация данной программы обеспечивает обязательные требования государственных образовательных стандартов.

Данная программа сопровождается учебно-методическим комплектом, включающим в себя :

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_ Основные требования к оформлению рабочей программы выполняются:

1.Наличие пояснительной записки, содержащей концепцию учебного курса. Да. Нет.

2.Структурирование курса по разделам и темам , разумность дозировки времени на изучение различных элементов программы. Да. Нет.

3.Система контроля ЗУН учащихся : Да. Нет.

Вывод: Данная программа может быть использована в качестве рабочей программы \_\_\_\_\_

Рекомендации учителю: \_\_\_\_\_

Рецензент: \_\_\_\_\_ Карелина Вера Николаевна



**Дидактический материал для проведения занятий по элективному курсу**

**Тема 1. Методы построения сечения многогранников**

Метод следов

1. На ребрах  $BB_1$ ,  $CC_1$  и  $DD_1$  призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  заданы соответственно точки  $P$ ,  $Q$  и  $R$  построить основной след секущей плоскости  $PQR$
2. На ребре  $MC$  пирамиды  $MABCD$  задана точка  $P$ , в грани  $MAВ$ - точка  $Q$ , а внутри пирамиды, в плоскости  $MBD$ - точка  $R$ . Построить основной след секущей плоскости  $PRQ$ .
3. На грани  $CC_1D_1D$  призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  задана точка  $P$ , а на ее ребрах  $AA_1$  и  $B_1C_1$  соответственно точки  $Q$  и  $R$  Построить сечение призмы плоскостью  $PRQ$ .
4. На ребре  $MC$  пирамиды  $MABCD$  задана точка  $P$ , в гранях  $MAД$  и  $MAВ$  заданы соответственно точки  $Q$  и  $R$ . Построить сечение плоскостью  $P R Q$ .

Геометрический метод

1. Высота правильной призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  в два раза меньше диагонали основания. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точку  $B$ , перпендикулярно прямой  $B_1O$ , где  $O$ - точка пересечения диагоналей основания.
2. Высота правильной призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  в два раза меньше диагонали основания. Постройте сечение призмы плоскостью, проходящей через точку  $E$ , середину ребра  $AB$ , перпендикулярно прямой  $B_1O$ .

Метод вспомогательных сечений.

1. На грани  $CC_1D_1D$  призмы  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  задана точка  $P$ , а на ее ребрах  $AA_1$  и  $B_1C_1$  соответственно точки  $Q$  и  $R$  Построить сечение призмы плоскостью  $PRQ$  методом вспомогательных сечений.
2. На ребре  $MC$  пирамиды  $MABCD$  задана точка  $P$ , в гранях  $MAД$  и  $MAВ$  заданы соответственно точки  $Q$  и  $R$ . Построить сечение плоскостью  $P R Q$  методом вспомогательных сечений.

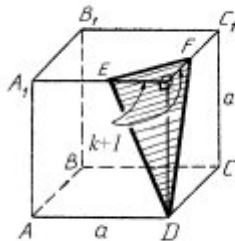
Комбинированный метод

1. На ребрах  $AA_1$ ,  $CC_1$ ,  $DD_1$  параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  заданы соответственно точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , а на ребре  $BB_1$  задана точка  $K$ . Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку  $K$  параллельно плоскости  $PRQ$ .
2. На ребрах  $BC$ ,  $CD$ ,  $CC_1$  параллелепипеда  $ABCDA_1B_1C_1D_1$  заданы соответственно точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ , а на ребре  $AA_1$  задана точка  $K$ . Построить сечение параллелепипеда плоскостью, проходящей через точку  $K$  параллельно плоскости  $PRQ$ .

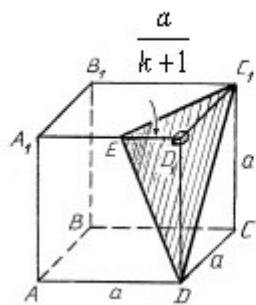
3. На ребре  $CC_1$  призмы  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  задана точка  $P$ . Построить прямую, проходящую через точку  $A$  параллельно прямой  $DP$ .
4. На ребрах  $CC_1, BC_1$  призмы  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  заданы соответственно точки  $P, Q$ . Построить сечение призмы плоскостью  $PRQ$ , проходящей через точку  $BA$  параллельно прямым  $DP$  и  $CQ$ .
5. На ребре  $CC_1$  призмы  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  задана точка  $P$ . Построить сечение призмы плоскостью. Проходящей через точку  $A$ , параллельно прямым  $DP$  и  $B_1D_1$ .

## Тема 2. Нахождение площади сечений в многогранниках.

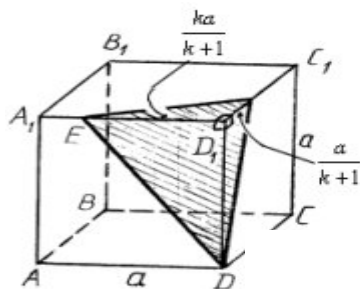
1. Найти площадь сечения куба  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  с ребром  $a$  плоскостью, проходящей через вершину  $D$  и точки  $E$  и  $F$  на ребрах  $A_1D_1$  и  $C_1D_1$  соответственно, если  $A_1E = k \cdot D_1E$  и  $C_1F = k \cdot D_1F$ .



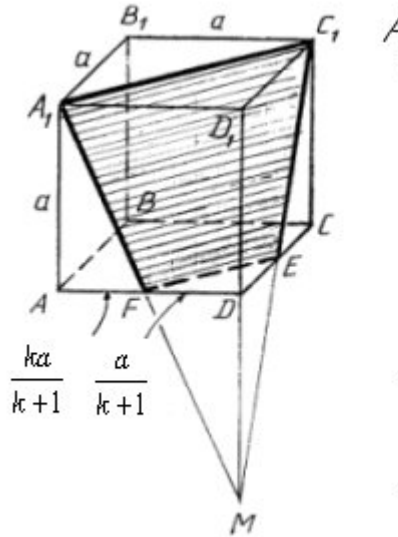
2. Найти площадь сечения куба  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  с ребром  $a$  плоскостью, проходящей через вершины  $C_1$  и  $D$  и точку  $E$  на ребре  $A_1D_1$ , если  $A_1E = k \cdot D_1E$ .



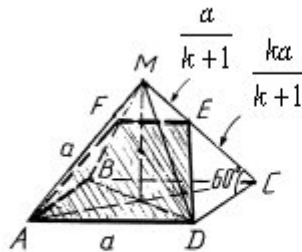
3. Найти площадь сечения куба  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  с ребром  $a$  плоскостью, проходящей через вершину  $D$  и точки  $E$  и  $F$  на ребрах  $A_1D_1$  и  $D_1C_1$  соответственно, если  $D_1E = k \cdot A_1E$  и  $C_1F = k \cdot D_1F$ .



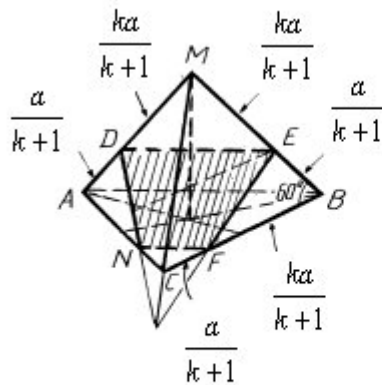
4. Найти площадь сечения куба  $ABCA_1B_1C_1D_1$  с ребром  $a$  плоскостью, проходящей через вершины  $A_1$  и  $C_1$  и точку  $F$  на ребре  $AD$ , если  $AF = k \cdot DF$ .



5. Найти площадь сечения правильной четырехугольной пирамиды  $ABCDM$  с ребрами  $a$  (половинка октаэдра) плоскостью, проходящей через сторону основания  $AD$  и точку  $E$  на боковом ребре  $MC$ , если  $CE = k \cdot ME$ .



5. Найти площадь сечения правильного тетраэдра  $ABCM$  с ребром  $a$  плоскостью, проходящей через точки  $D$ ,  $E$  и  $F$  на ребрах  $MA$ ,  $MB$  и  $BC$  соответственно, если  $MD : AD = ME : BE = BF : CF = k$ .



6. Найти площадь сечения правильной треугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1$  плоскостью, проходящей через сторону основания  $A_1B_1$  и точку  $D$  на стороне  $BC$  другого основания, если  $CD = k \cdot BD$ , сторона основания призмы равна  $a$  и высота  $H = pa$ .

7. Найти площадь сечения куба  $ABCA_1B_1C_1D_1$  с ребром  $a$  плоскостью, проходящей через вершину  $C_1$  и середины ребер  $A_1D_1$  и  $CD$ .

8. Найти площадь сечения куба  $ABCA_1B_1C_1D_1$  с ребром  $a$  плоскостью, проходящей через вершины  $B_1$  и  $D$  и середину ребра  $CC_1$ .

9. Найти площадь сечения куба  $ABCA_1B_1C_1D_1$  с ребром  $a$  плоскостью, проходящей через вершины  $B_1$  и  $D$  и точку  $M$  на ребре  $CC_1$ , если  $C_1M = 2 \cdot CM$ .

10. Найти площадь сечения куба  $ABCA_1B_1C_1D_1$  с ребром  $a$  плоскостью, проходящей через вершину  $B_1$  и середины ребер  $AD$  и  $CD$ .

11. В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  со стороной основания  $a$  и высотой  $H = pa$  найти площадь сечения призмы плоскостью, проходящей через вершину  $C$  и середины ребер  $AA_1$  и  $A_1B_1$ .

12. Найти площадь сечения куба  $ABCA_1B_1C_1D_1$  с ребром  $a$  плоскостью, проходящей через середину ребер  $AD$  и  $CD$  и точку  $B_2$  на ребре  $BB_1$  при условии  $BB_2 = k \cdot B_1B_2$ .

13. Найти площадь сечения правильной четырехугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1D_1$  со стороной основания  $a$  и высотой  $H = pa$  плоскостью, проходящей через вершину  $B_1$  и середины ребер  $AD$  и  $CD$ .

14. Найти площадь сечения правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  со стороной основания  $a$  и высотой  $H = ka$  плоскостью, проходящей через середины ребер  $B_1C_1$ ,  $DE$  и  $EF$ .

15. Найти площадь сечения правильной четырехугольной призмы  $ABCA_1B_1C_1D_1$  со стороной основания  $a$  и высотой  $H = pa$  плоскостью, проходящей через вершину  $B_1$  и середины ребра  $CD$  и точку  $F$  ребра  $AD$  при условии  $DF = 2 \cdot AF$

### **Тема 3. Нахождение расстояния и угла между скрещивающимися прямыми в многогранниках**

1. В кубе с ребром  $a$  найти расстояние и угол между любым ребром и диагональю не пересекающей его грани.

2. В кубе с ребром  $a$  найти расстояние и угол между непересекающимися диагоналями двух смежных граней.

3. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  с ребром  $a$  найти расстояние и угол между прямыми  $AC$  и  $B_1 F$  при условии, что  $F$  принадлежит  $DD_1$  и  $DF = k \cdot DD_1$ .

4. В правильной четырехугольной пирамиде  $ABCD M$  со стороной основания  $a$  и боковым ребром  $L = ka$  найти расстояние и угол между:

- 1) боковым ребром и не пересекающейся с ним диагональю основания;
- 2) апофемой и не пересекающейся с ней стороной основания.

5. В правильной усеченной четырехугольной пирамиде со сторонами оснований  $a$  и  $b$  и высотой  $H$  найти расстояние и угол между главной диагональю и не пересекающейся с ней диагональю большего основания.

6. В правильной четырехугольной пирамиде со стороной основания  $a$  и боковым ребром  $L = ka$  найти расстояние и угол между апофемой и диагональю основания.

7. В правильной шестиугольной пирамиде со стороной основания  $a$  и боковым ребром  $L = ka$  найти расстояние и угол между:

- 1) боковым ребром и не пересекающейся с ним стороной основания;
- 2) боковым ребром и не пересекающейся с ним диагональю основания.

8. В правильной треугольной призме высотой  $H = ka$  найти расстояние и угол между диагональю боковой грани и не пересекающейся с ней стороной основания  $a$ .

### **Тема 4. «Определение угла между плоскостями»**

1. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  определить угол между плоскостями сечений  $AB_1 C_1 D$  и  $CB_1 A_1 D$ .

2. В прямоугольном параллелепипеде с размерами  $a, b, H$  определить угол между секущими плоскостями, проходящими через главную диагональ и соответственно через стороны основания  $a$  и  $b$ .

3. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  определить угол между диагональной плоскостью  $BB_1 D_1 D$  и плоскостью сечения, проходящей через вершины  $A_1, C$  и точку  $F$  на ребре  $DD_1$  при условии  $DF = k \cdot DD_1$ .

4. В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  определить угол, образованный плоскостями сечений  $AB_1 C$  и  $AFC$  при условии, что  $F$  лежит на  $DD_1$  и  $DF = k \cdot DD_1$ .

5. В правильной четырехугольной пирамиде  $ABCD M$ , все ребра которой равны, определить угол, образованный плоскостью, проходящей через боковое ребро  $BM$  и

высоту пирамиды  $MO$ , и плоскостью, проходящей через то же боковое ребро и точку  $Z$  принадлежащую  $AD$  при условии  $DP = k AP$

### Тема 5. Решение задач повышенной сложности

Тема 2. Задачи № 1, 2, 4, 7, 12, 15 .Тема 4. задачи № 2, 3, 4. В данных задачах выделить дополнительный вопрос *Найти отношение объемов частей куба* (или в каком отношении объем куба делится указанным сечением).

<b>ВАРИАНТ 1</b>	
1	В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием $ABC$ известны ребра: $AB = 24\sqrt{3}$ , $SC = 25$ . Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер $AS$ и $BC$ .
2	В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны ребра: $AB = 6$ , $AD = 8$ , $CC_1 = 16$ . Найдите угол между плоскостями $ABC$ и $A_1 DB$ .
3	Найти площадь сечения куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром $a$ плоскостью, проходящей через вершину $D$ и точки $E$ и $F$ на ребрах $A_1 D_1$ и $C_1 D_1$ соответственно, если $A_1 E = 6 \cdot D_1 E$ и $C_1 F = 6k \cdot D_1 F$ .
4	В правильной шестиугольной пирамиде со стороной основания $a$ и боковым ребром $L = 2a$ найти расстояние и угол между: 1) боковым ребром и не пересекающейся с ним стороной основания; 2) боковым ребром и непересекающейся с ним диагональю основания.
<b>ВАРИАНТ 2</b>	
1	В правильной треугольной пирамиде $SABC$ с основанием $ABC$ известны ребра: $AB = 20\sqrt{3}$ , $SC = 29$ . Найдите угол, образованный плоскостью основания и прямой, проходящей через середины ребер $AS$ и $BC$ .
2	В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны ребра: $AB = 5$ , $AD = 12$ , $CC_1 = 15$ . Найдите угол между плоскостями $ABC$ и $A_1 DB$ .
3	Найти площадь сечения куба $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром $a$ плоскостью, проходящей через вершину $D$ и точки $E$ и $F$ на ребрах $A_1 D_1$ и $C_1 D_1$ соответственно, если $A_1 E = 3 \cdot D_1 E$ и $C_1 F = 3 \cdot D_1 F$ .
4	В правильной шестиугольной пирамиде со стороной основания $a$ и боковым ребром $L = 5a$ найти расстояние и угол между: 1) боковым ребром и не пересекающейся с ним стороной основания; 2) боковым ребром и непересекающейся с ним диагональю основания.



## ПРИЛОЖЕНИЕ 3

### Задачи для решения в группе.

#### Группа 1

Найдите площадь сечения куба  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  с ребром  $a$  плоскостью, проходящей через точки  $E, F, M$  соответственно на ребрах  $A_1B_1, AD$  и  $CD$  при условии  $A_1E: B_1E = AF: DF = CM: DM = k$

#### Группа 2

Найдите площадь сечения правильной шестиугольной призмы  $ABCDEF A_1B_1C_1D_1E_1F_1$  со стороной основания  $a$  и высотой  $H = kA$  плоскостью, проходящей через середины ребер  $B_1C_1, DE$  и  $EF$

#### Группа 3

В правильной треугольной призме высотой  $H = ka$  найти расстояние и угол между диагональю боковой грани и не пересекающейся с ней стороной основания  $a$ .

#### Группа 4

В правильной усеченной четырехугольной пирамиде со сторонами оснований  $a$  и  $b$  и высотой  $H$  найти расстояние и угол между главной диагональю и не пересекающейся с ней диагональю большего основания.

#### Группа 5

Найти площадь сечения куба  $ABCD A_1B_1C_1D_1$  с ребром  $a$  плоскостью, проходящей через вершину  $B_1$  и середину ребер  $AD$  и  $CD$ .

**Темы исследовательских работ.**

1. Метод следов построения сечений
2. Метод внутренних проекций
3. Метод дополнения  $n$ -угольной призмы (пирамиды) до треугольной призмы (пирамиды)
4. Метод деления  $n$ -угольной призмы (пирамиды) на треугольные призмы (пирамиды)
5. Метод параллельных прямых
6. Анализ задач по теме «Нахождение углов между плоскостями» в КИМах по математике 2011-2012 г.г.
7. Сборник задач по теме «Нахождение расстояний между скрещивающимися прямыми» в КИМах по математике 2012 года